



Zachodniopomorski  
Uniwersytet Technologiczny  
w Szczecinie



Wydział  
Inżynierii Mechanicznej  
i Mechatroniki

---

Instytut Technologii Mechanicznej

# Techniki symulacji w budowie maszyn

Ćwiczenie laboratoryjne nr 1:

**Symulacja zmian poziomu cieczy w zbiorniku oraz układzie  
zbiorników**

Opracowanie:

Karol Miądlicki, mgr inż.

# Część wprowadzająca

## 1. Modelowanie i symulacja

Modele matematyczne(abstrakcyjne) to zbiór powiązań między zmiennymi, na podstawie, których można przewidzieć(symulować) w przybliżony sposób jakiś aspekt rzeczywistości. Modelem matematycznym przedstawiającym układy ciągłe są najczęściej równania różniczkowe, opisujące jego działanie. W powyższej definicji należy zwrócić szczególną uwagę na pojęcie „przybliżony”. Ponieważ metody numeryczne wykorzystywane do rozwiązywania równań lub części układów równań różniczkowych zawsze obciążone są błędem, który m.in. zależy od:

- Wybranej metody numerycznej
- Dokładności programu, w którym przeprowadzamy symulację(ile bitów poświęconych jest na przedstawienie liczby dziesiętnej w postaci binarnej)

Odpowiednio zbudowany model matematyczny umożliwia zbadanie działania układu(modyfikację parametrów, wartości wejściowych, wyznaczenie wyjściowych) bez potrzeby budowy/przebudowy modelu realnego(fizycznego).

Obliczeniowy proces badania odpowiedzi modelu, o określonych parametrach, na zmianę wybranych wielkości wejściowych zwykle się nazywać symulacją(komputerową). Modelowanie i symulacja znalazły szerokie zastosowanie m.in. w projektowaniu układów sterowania.

## 2. Model matematyczny zbiornika z odpływem grawitacyjnym

Modele układów hydraulicznych opisują mechanikę ruchu cieczy w strukturach zawierających zbiorniki i elementy przepływowe w postaci: rur, zaworów, zwężeń, pomp. Ciecze poruszają się w nich pod wpływem sił, np. siły grawitacji lub różnicy ciśnień. Szybkość przepływu cieczy przez dany przekrój obiektu to natężeniem przepływu  $f(t)$ . Może być zdefiniowany, jako:

- Jednostka objętości na jednostkę czasu  $\left[\frac{m^3}{s}\right]$

$$f(t) = \frac{dV}{dt}$$

- Jednostka masy na jednostkę czasu  $\left[\frac{kg}{s}\right]$  – jest używana, jeżeli płyn w układzie zmienia gęstość

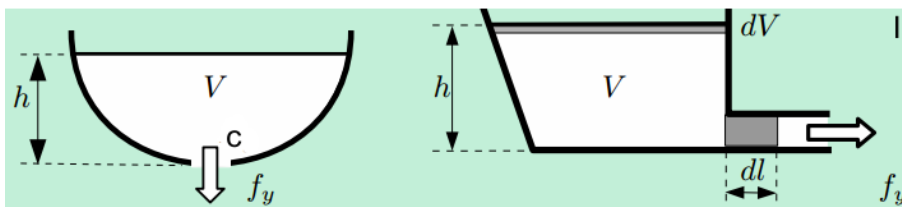
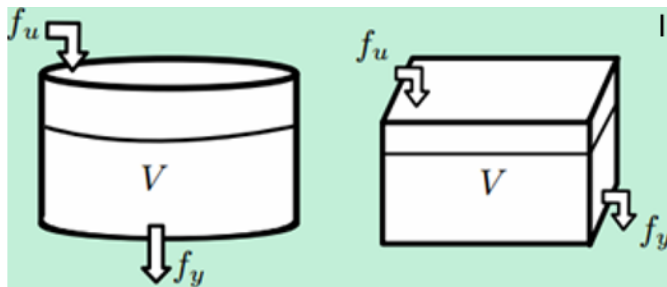
$$f(t) = \frac{dm}{dt}$$

### 2.1 Zbiornik ze swobodnym wypływem

Zbiorniki o różnych kształtach i sztywnej konstrukcji są głównymi elementami układów hydraulicznych. Wypływ swobodny polega na tym, że ciecz wylatuje ze zbiornika pod

**Commented [KM1]:** Dające się opisać funkcją ciągłą.  
[http://www.matmana6.pl/tablice\\_matematyczne/studia/funkcje\\_jednej\\_zmiennej\\_rzeczywistej/130-ciaglosc\\_funkcji](http://www.matmana6.pl/tablice_matematyczne/studia/funkcje_jednej_zmiennej_rzeczywistej/130-ciaglosc_funkcji)

wpływem własnego ciężaru. Ilość wypływającej cieczy zależy od pola powierzchni przekroju wypływu oraz ilości cieczy znajdującej się w zbiorniku. Zyskuje ona energię kinetyczną kosztem energii potencjalnej cieczy w zbiorniku (równanie Bernoulliego).



Rys1. Przykład zbiorników ze swobodnym wypływem

Objaśnienia zmiennych:

$f_u(t) = q_{we}$  – przepływ wejściowy (to, co wpływa do zbiornika)

$f_y(t) = q_{wy}$  – przepływ wyjściowy (to, co wypływa ze zbiornika)

$\Delta f(t) = \frac{dV}{dt}$  – ilość cieczy w zbiorniku w konkretnej chwili  $t$

$V$  – objętość cieczy w zbiorniku

$V_c$  – objętość cieczy wypływającej przez otwór

$h$  – wysokość cieczy w zbiorniku

$A$  – pole powierzchni dna zbiornika (zależy od kształtu zbiornika)

$C$  – pole powierzchni przekroju wypływu

$v$  – prędkość wypływającej cieczy

$g$  – przyspieszenie ziemskie

Aby otrzymać model matematyczny zbiornika w postaci równania różniczkowego najpierw należy wykonać bilans przepływów:

- Ilość cieczy w zbiorniku zależy od różnicy między natężeniem przepływów (ile cieczy wpływa a ile wypływa):

$$\Delta f(t) = f_u(t) - f_y(t) = \frac{dV}{dt} \quad (1)$$

- Aby otrzymać zależność wysokości cieczy od przepływów należy rozpisać objętość:

**Commented [KM2]:** Im wyższy poziom cieczy ( $h$ ) w zbiorniku tym więcej zgromadzonej w nim energii potencjalnej. Ta metoda gromadzenia energii jest wykorzystywana m.in. w elektrowniach szczytowo-pompowych.  
[http://pl.wikipedia.org/wiki/Elektrownia\\_Wodna\\_%C5%BBarnowiec](http://pl.wikipedia.org/wiki/Elektrownia_Wodna_%C5%BBarnowiec)

$$V = h * A$$

po podstawieniu V do wzoru 1

$$\Delta f(t) = f_u(t) - f_y(t) = \frac{dV}{dt} = A * \frac{dh}{dt}$$

**Commented [KM3]:** A jest stałą, więc można wyciągnąć je przed pochodną

c) Następnie zależy wyznaczyć przepływ wyjściowy:

$$f_y(t) = \frac{dV_c}{dt}$$

$$\frac{dV_c}{dt} = C * \frac{dl}{dt} \Leftrightarrow \frac{dl}{dt} = \frac{dV_c}{dt C}$$

**Commented [KM4]:** dl – przemieszczenie cieczy. Można porównać do h w zbiorniku, jeśli wypływ przekręci o 90 stopni.

wykorzystując zasadę zachowania energii:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

**Commented [KM5]:** W zamkniętym układzie energia potencjalna równa się energii kinetycznej

a ponieważ prędkość to pierwsza pochodna przemieszczenia to:

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{dV_c}{dt C} = \sqrt{2gh} \rightarrow f_y(t) = \frac{dV_c}{dt} = C * \sqrt{2gh}$$

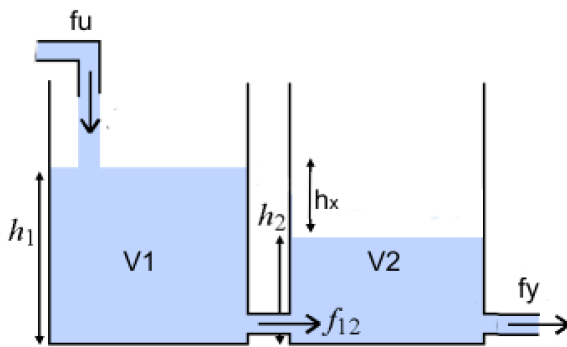
d) Zakładamy, że przepływ wejściowy do zbiornika jest stały, więc bilans zbiornika:

$$\Delta f(t) = A * \frac{dh}{dt} = f_u(t) - C * \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} * (f_u(t) - C * \sqrt{2gh})$$

Jak widać z powyższych rozważań natężenie przepływu nie zależy od kształtu zbiornika, ale od powierzchni otworu wyjściowego i poziomu cieczy. Ponadto dla w przypadku zbiornika zamkniętego należy jeszcze wziąć pod uwagę ciśnienie cieczy w zbiorniku.

## 2.2 Układ zbiorników



Rys2. Przykład układu zbiorników ze swobodnym wypływem]

W układzie tym do zbiornika pierwszego o powierzchni  $A_1$  dostarczana jest ciecz o natężeniu dopływu  $f_u$ . Poziomą cieczą w zbiorniku jest zmienny i wynosi  $h_1$ . Do zbiornika drugiego ciecz

przepływa poprzez otwór o powierzchni B z natężeniem  $f_{12}$ . Powierzchnia drugiego zbiornika wynosi  $A_2$ , a poziom cieczy wynosi  $h_2$ . Ciecz z drugiego zbiornika jest odprowadzana za pomocą otworu o powierzchni C z natężeniem wypływu  $f_y$ . Wypływ cieczy jest swobodny. Wszelkie wyprowadzenia są identyczne jak dla jednego zbiornika. Jedyną różnicą jest wspólny przepływ  $f_{12}$ .

a) Równania bilansu przepływu dla zbiorników:

$$\frac{dV_1}{dt} = A_1 * \frac{dh_1}{dt} = f_u(t) - f_{12}(t)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = A_2 * \frac{dh_2}{dt} = f_{12}(t) - f_y(t)$$

b) Wyprowadzenie wspólnego przepływu jest bardzo podobne jak dla wypływu pojedynczego zbiornika. Różnica polega na tym, że szybkość przepływu zależy od różnicy poziomów  $h_x$  w zbiornikach. Ponieważ zbiornik drugi nie posiada innego dopływu niż ze zbiornika pierwszego poziom wody w nim zawsze będzie niższy niż w pierwszym.

$$f_{12}(t) = \frac{dV_B}{dt} = B * \sqrt{2gh_x} = B * \sqrt{2g|h_1 - h_2|} * \text{sgn}(h_1 - h_2)$$

c) Po podstawieniach i przekształceniach końcowe równania bilansu są następujące:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} (f_u(t) - B\sqrt{2g|h_1 - h_2|} * \text{sgn}(h_1 - h_2))$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} (B\sqrt{2g|h_1 - h_2|} * \text{sgn}(h_1 - h_2) - C\sqrt{2gh_2})$$

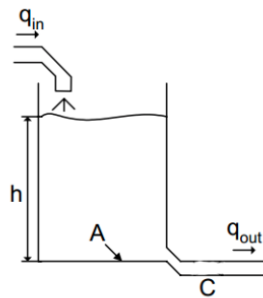
**Commented [KM6]:** Pole przekroju przepływu między zbiornikami

**Commented [KM7]:** Pod pierwiastkiem muszą znajdować się wartości dodatnie

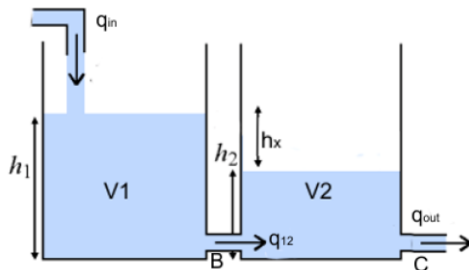
**Commented [KM8]:** Funkcja signum.  
<http://pl.wikipedia.org/wiki/Signum>

## Zadania do ćwiczenia laboratoryjnego

- Wprowadzić do środowiska Matlab/Simulink następujące równania i przeprowadzić symulację dla ustawień symulacji Fixed oraz Variable step:
  - $\sin(x) + \cos(x)$
  - $\sin(x) + \sin(x + \pi)$  przy użyciu bločku „sine wave”
  - $\sin(x) + \sin(x + \pi)$  przy użyciu bločku „trigonometric function”
  - $\sin(x/y) + \cos(\sin(x/z)) + x * y$
- Zamodelować w środowisku Matlab/Simulink przedstawiony zbiornik. Przy ustawieniach Fixed-step, Fixed-step size:  $10^{-4}$ :

















- Dla zamodelowanego zbiornika przeprowadzić po 2 symulacje zmieniając parametry:  $A$ ,  $C$ , gdzie:
  - $q_{in} - \text{const}$
  - $q_{in} - \text{const}$  załączany bločkem „manual switch”
  - $q_{in} - \text{funkcja sin}$
  - $q_{in} - \text{funkcja sin}$  załączana bločkem „manual switch”
- DODATKOWE: Zamodelować w środowisku Matlab/Simulink przedstawiony układ zbiorników i a następnie przeprowadzić symulację jak w punkcie 3 uwzględniając parametry  $A1$ ,  $A2$ ,  $B$ ,  $C$ :



Commented [KM9]: Simulink>Simulation>Model configuration parameters

## Bloczki ze środowiska Matlab/Simulink wykorzystywane na laboratorium

Bloczek	Opis	Uwagi
 Scope	Oscyloskop – wyświetla przebieg sygnału	Po dwukrotnym kliknięciu na bloczek > parameters(trybik)>history>odznaczyć opcję „Limit data points to last”
 Sum	Sumator	
 Integrator Limited	Całkowanie	Upper saturation limit: 500 Lower saturation limit: 0
 Gain	Wzmocnienie sygnału	Można używać do dzielenia
 Product	Mnożenie sygnałów	
 Trigonometric Function	Funkcja sinus	$\sin(x)$ – x podaje się na wejściu bloczku
 Sqrt	Pierwiastek	
 Abs	Wartość bezwzględna	
 Sign	Funkcja signum	
 Sine Wave	Generator funkcji sin	
 Step	Impuls jednostkowy	
 Mux	Multiplekser sygnałów	Do wyświetlania kilku sygnałów na jednym „scope”

 Divide	Dzielenie sygnałów	
 Constant	Stała	



## Wymagania do sprawozdania

1. Schematy równań z zadania pierwszego i wyniki w postaci wykresów –wyjaśnić skąd biorą się różnice w wynikach zależnie od metody num i co z tego wynika.
2. Schemat w simulinku zamodelowanego zbiornika. Opisać, co oznacza, która zmienna oraz dobrać tak parametry, aby parametry i czasy napełniania zbiornika były w miarę realne.
3. Przeprowadzić symulacje jak w zad 3.
4. Zadanie 4 jest dla chętnych, wpływa tylko pozytywnie na ocenę.
5. We wnioskach proszę uwzględnić jak zmiana każdego z parametrów wpływa na ustalenie się poziomu w zbiorniku/zbiornikach. Pamiętać o właściwych jednostkach.
6. Sprawozdania muszą być wykonane samodzielnie! Najlepiej jak każdy by przyjął inne wartości zmiennych i parametrów.

**Commented [KM10]:** Sine wave, a trig function

**Commented [KM11]:** Przepływy, wysokości, przekroje itp. nie są bezwymiarowe.

**Commented [KM12]:** Naprawdę widać kiedy są przerabiane!

Pytania i uwagi do skryptu proszę kierować na maila lub postawić w komentarzach na stronie www. Oceny i uwagi do otrzymanych sprawozdań będę się starał umieszczać na bieżąco w zakładce „Studenci”.